SOLUZIONI

1. THE MORNING SQUAWK	487
2. THE MAC-Z	9832
3. LA MISSIONE	4830
4. LA MALEDIZIONE DI VECNA	894
5. RUNNING UP THAT HILL	97
6. FUGA DA CAMAZOTZ	800
7. UPSIDE DOWN	45
8. IL QUADERNO DEL DOTT. BRENNER	1656
9. LA BATTAGLIA DI STARCOURT	197
10. IF I ONLY COULD	29
11. LA NON-PROPOSTA	778
12. LA TRILATERAZIONE DEL PROF. CLARK	40
13. I'M A MATH-ERIAL GIRL	127
14. NEVER ENDING STORY	2028
15. PURPLE RAIN	61
16. NOI SIAMO UNO	6361
17. HELLFIRE CLUB	34
18. Mr. WHEELER	62
19. SEVEN SHOOTS	5040
20. THE WORMHOLE	320
21.WE CAN BE HEROES	722

1. THE MORNING SQUAWK

Il numero primo più grande minore di 500 è 499. Verifichiamo se 499 è un numero felice: $16+81+81=178$ → $1+49+64=114$ → $1+1+16=18$ → $1+64=65$ → $36+25=61$ → $36+1=37$ → $9+49=58$ → $25+64=89$ → $64+81=145$ → $1+16+25=42$ → $16+4=20$ → 4 → 16 → $1+36=37$. A questo punto mi posso fermare perché ho trovato un loop nella sequenza. Il precedente numero primo è 491. Verifichiamo: $16+81+1=98$ l → $81+64=145$. A questo punto mi posso fermare perché ho trovato un valore della precedente sequenza che ha portato a un loop. 487 è primo, verifichiamo: $16+64+49=129$ → $1+4+81=86$ → $64+36=100$ → 1. 487 è un numero felice. La risposta è $\mathbf{487}$.

2. THE MAC-Z

Per determinare lo spigolo del corpo centrale dell'edificio possiamo sezionarlo con un piano passante per due spigoli laterali opposti [figura 1]. Sia a la lunghezza dello spigolo del cubo grande. Dato che $\overline{CF} = a$, $\overline{EF} = \sqrt{2}\,a$, si ha $r^2 = a^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2$ da cui $a = \sqrt{\frac{2}{3}}\,r$. Per determinare lo spigolo di uno dei quattro cubi laterali sezioniamo con un piano verticale passante per due spigoli verticali opposti di due cubi piccoli addossati a facce opposte del cubo grande [figura 2]. Sia b la lunghezza dello spigolo del cubo piccolo. Dato che $\overline{PQ} = b$, $\overline{OP} = r$, si ha:

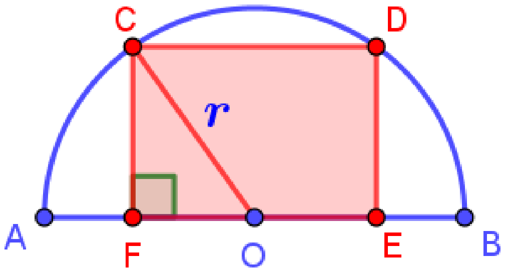


figura (1)

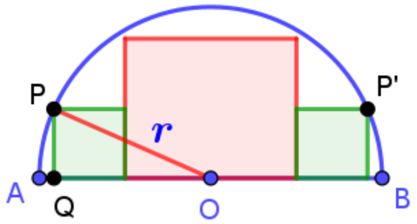


figura (2)

$$r^2 = b^2 + (\overline{OQ})^2 \ (\bullet)$$

Se osserviamo ora la base del solido [figura 3] si ha:

$$(\overline{OQ})^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{a}{2}\right)^2 (\bullet\bullet)$$

Confrontando le relazioni ($\bullet$) e ($\bullet\bullet$) si ottiene:

$$r^2 = b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{a}{2}\right)^2 \ \rightarrow \ r^2 = \frac{9}{4}b^2 + ab + \frac{a^2}{4}.$$

Ricordando che $a = \sqrt{\frac{2}{3}}\,r$, si ottiene l'equazione di secondo grado:

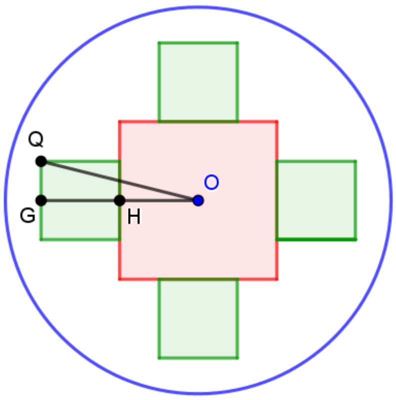


figura (3)

$$\frac{9}{4}b^2 + \sqrt{\frac{2}{3}}rb - \frac{5}{6}r^2 = 0$$

$$b = \frac{-\sqrt{\frac{2}{3}}r + \sqrt{\frac{2}{3}r^2 + \frac{15}{2}r^2}}{\frac{9}{2}} = \frac{2}{9}\left(-\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{7}{\sqrt{6}}\right)r = \frac{10}{9\sqrt{6}}r\,.$$

Il volume dell'edificio è dunque:

$$V = a^3 + 4b^3 = \left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} + 4\frac{1000}{9^3 \cdot 6\sqrt{6}}\right)r^3 = \frac{4916}{9^3 \cdot 3\sqrt{6}}r^3$$

Sostituendo il valore di r si ha:

$$V = \frac{4916}{9^3 \cdot 3\sqrt{6}} \cdot 9^3 \cdot 6\sqrt{6} = 9832$$

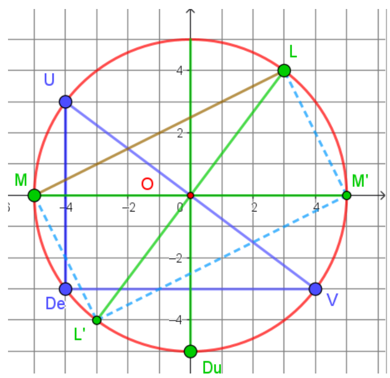
La risposta è $\mathbf{9832}$.

3. LA MISSIONE

Abbiamo una griglia con $y = 2730$ righe e $y = 2310$ colonne. Il numero di quadrati attraversato dalla diagonale sarà dato da $N = x + y - MCD(x, y)$. Dato che $2730 = 13 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2$ e $2310 = 11 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2$, si ha $N = 2730 + 2310 - 210 = 4830$. La risposta è $\mathbf{4830}$.

4. LA MALEDIZIONE DI VECNA

Sono noti $DeV = 8\,m$, $DeU = 6\,m$ e quindi $UV = 10\,m$. Rappresentiamo una delle due configurazioni che rendono massima la distanza tra Lucas e Mike, il segmento LM e inseriamo un opportuno sistema di riferimento cartesiano. L'equazione della circonferenza circoscritta è $x^2 + y^2 = 25$, la retta LO ha equazione $y = \frac{4}{3}x$. Le coordinate di L sono date da:



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = \dfrac{4}{3}x \end{cases}$$

Ricavato $L(3,4)$ si ha $LM = \sqrt{4^2+8^2} = 4\sqrt{5}\,m = 400\sqrt{5}\,cm$. La risposta è quindi $\mathbf{894}$.

5. RUNNING UP THAT HILL

Tra tutti i fattori di posto pari si può raccogliere un 25. Ne segue che $N = 25^{50} \cdot 100!$. La massima potenza di 5 che divide N ha esponente $\left\lfloor\frac{100}{5}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{100}{25}\right\rfloor + 100 = 124$. La massima potenza di 2 che divide N ha esponente $\left\lfloor\frac{100}{2}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{100}{4}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{100}{8}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{100}{16}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{100}{32}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{100}{64}\right\rfloor = 50+25+12+6+3+1 = 97$. Allora il numero di zeri con cui termina N è uguale al $\min\{124,97\}$. La risposta è quindi $\mathbf{97}$.

6. FUGA DA CAMAZOTZ

Dividendo per 100 la quantità cercata e utilizzando la disuguaglianza media aritmetica - media quadratica si ottiene:

$$\frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100}\sqrt{100x_k+k} \le \sqrt{\frac{100x_1+1+100x_2+2+\cdots+100x_{100}+100}{100}} =$$
$$\sqrt{\frac{100(x_1+x_2+\cdots+x_{100})+50\cdot 101}{100}} = \sqrt{\frac{27}{2}+\frac{101}{2}} = 8\,.$$

Dunque

$$\sum_{k=1}^{100}\sqrt{100x_k+k} \le 800\,.$$

Il valore massimo si ottiene per $x_k = \frac{64-k}{100}, \forall\, k = 1, 2, \dots, 100$. La risposta è $\mathbf{800}$.

7. UPSIDE DOWN

Dato che il quadrilatero $A_1A_2A_3A_4$ è un rettangolo, si possono scrivere le seguenti relazioni [vedi figura]:

- $\overline{A_1O}^2 + \overline{A_3O}^2 = x_1^2 + y_2^2 + x_2^2 + y_1^2$
- $\overline{A_2O}^2 + \overline{A_4O}^2 = x_2^2 + y_2^2 + x_1^2 + y_1^2$
- $\overline{A_1B_1}^2 = \overline{A_1O}^2 - r^2$
- $\overline{A_2B_2}^2 = \overline{A_2O}^2 - r^2$
- $\overline{A_3B_3}^2 = \overline{A_3O}^2 - r^2$
- $\overline{A_4B_4}^2 = \overline{A_4O}^2 - r^2$

Confrontando queste relazioni si ricava:

$$\overline{A_1B_1}^2 + \overline{A_3B_3}^2 = \overline{A_1O}^2 + \overline{A_3O}^2 - 2r^2 =$$
$$= \overline{A_2O}^2 + \overline{A_4O}^2 - 2r^2 = \overline{A_2B_2}^2 + \overline{A_4B_4}^2$$

Da cui segue che

$$\overline{A_4B_4}^2 = \overline{A_1B_1}^2 + \overline{A_3B_3}^2 - \overline{A_2B_2}^2$$
$$\overline{A_4B_4} = \sqrt{53^2+21^2-35^5} = 45$$

La risposta è $\mathbf{45}$.

8. IL QUADERNO DEL DOTT. BRENNER

Per il teorema di Wilson risulta $1986! \equiv -1 (\mathrm{mod}\ 1987)$. Ne segue che $1986 \cdot 1985 \cdot 1984 \cdot 1983! \equiv -1 (\mathrm{mod}\ 1987)$, in mod 1987 si ottiene $-6 \cdot 1983! \equiv 1986 (\mathrm{mod}\ 1987)$. Dividendo per -6 entrambi i membri si ottiene $1983! \equiv -331 (\mathrm{mod}\ 1987) \equiv 1656 (\mathrm{mod}\ 1987)$. La risposta è $\mathbf{1656}$.

9. LA BATTAGLIA DI STARCOURT

Indichiamo con f la probabilità che arrivi un flusso pieno e con p_k la probabilità che la macchina si ricarichi quando ha accumulato k flussi di energia. La macchina si ricarica se arrivano 4 flussi pieni consecutivi, oppure se non arrivano due flussi depotenziati consecutivi. Allora si hanno le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} p = fp_1 + (1-f)p_0 \\ p_1 = fp_2 + (1-f)p_0 \\ p_2 = fp_3 + (1-f)p_0 \\ p_3 = f + (1-f)p_0 \\ p_0 = fp_1 \end{cases}$$

Sostituiamo p_3 in p_2 e poi p_2 in p_1 e infine p_0 in p_1:

- $p_2 = f[f + (1-f)p_0] + (1-f)p_0 = f^2 + (1+f)(1-f)p_0$
- $p_1 = f[f^2 + (1+f)(1-f)p_0] + (1-f)p_0 = f^3 + (1+f+f^2)(1-f)p_0$
- $p_1 = f^3 + (1+f+f^2)(1-f)fp_1$

Dall'ultima relazione si ricava:

$$p_1 = \frac{f^3}{1-(1+f+f^2)(1-f)f}$$

Sostituendo $f = \frac{3}{4}$ si ottiene:

$$p_1 = \frac{\frac{27}{64}}{1-\left(1+\frac{3}{4}+\frac{9}{16}\right)\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}} = \frac{108}{145}$$

Dalla prima relazione si ottiene:

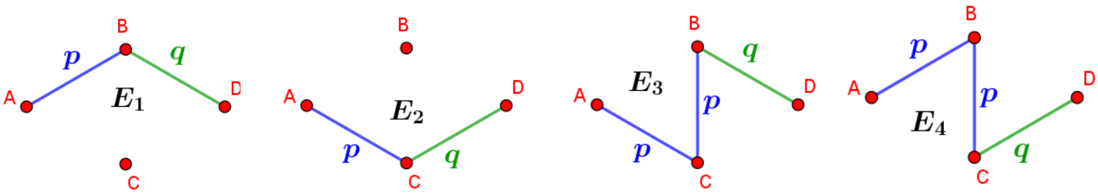
$$p = fp_1 + (1-f)fp_1 = (2-f)fp_1 = \frac{5}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{108}{145} = \frac{81}{116}$$

La risposta è $\mathbf{197}$.

10. IF I ONLY COULD

Soluzione 1: Per andare dal piano A, a cui si trova Lucas, al seminterrato D serve che almeno un percorso sia libero da mostri (aperto), cioè si deve verificare almeno uno dei seguenti eventi:

- E_1: $\{A,B\}$, $\{B,D\}$ sono aperti;
- E_2: $\{A,C\}$, $\{C,D\}$ sono aperti;
- E_3: $\{A,B\}$, $\{B,C\}$, $\{C,D\}$ sono aperti;
- E_3: $\{A,C\}$, $\{C,B\}$, $\{B,D\}$ sono aperti.



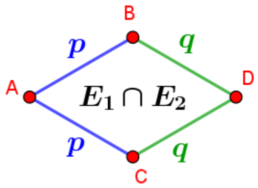
La probabilità cercata è quindi $P = p(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4)$. Per il principio di inclusione-esclusione si ha:

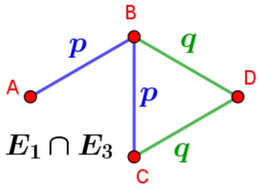
$$P = \sum_{i=1}^{4} p(E_i) - \sum_{i\neq j} p(E_i \cap E_j) + \sum_{i\neq j\neq k} p(E_i \cap E_j \cap E_k) - p(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4)$$

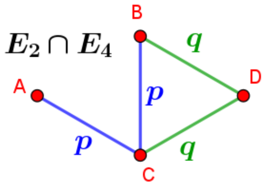
Calcoliamo la probabilità dei singoli eventi.

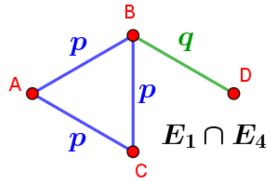
- $p(E_1) = p(E_2) = pq$

- $p(E_3) = p(E_4) = p^2 q$
- $p(E_1 \cap E_2) = p^2 q^2$
- $p(E_1 \cap E_3) = p(E_2 \cap E_4) = p^2 q^2$
- $p(E_1 \cap E_4) = p(E_2 \cap E_3) = p^3 q$

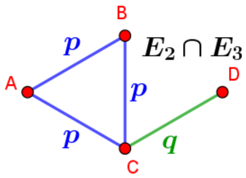


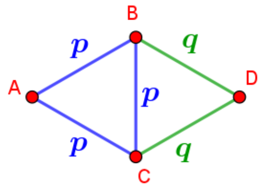






- $p(E_3 \cap E_4) = p^3 q^2$
- $p\left(E_i \cap E_j \cap E_k\right) = p^3 q^2$ in tutti e quattro i casi
- $p(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4) = p^3 q^2$





$E_3 \cap E_4$

$E_i \cap E_j \cap E_k$

$E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4$

Allora si ha:

$$P = (2pq + 2p^2q) - (3p^2q^2 + 2p^3q + p^3q^2) + (4p^3q^2) - (p^3q^2)$$

$$= 2pq + 2p^2q - 3p^2q^2 - 2p^3q + 2p^3q^2$$

Sostituendo $pq = \frac{1}{2}$ si ricava:

$$P = 1 + p - \frac{3}{4} - p^2 + \frac{1}{2}p = -p^2 + \frac{3}{2}p + \frac{1}{4}$$

Dato che $0 \leq p, q \leq 1$ e $pq = \frac{1}{2}$, si ha $\frac{1}{2} \leq p \leq 1$. Massimizziamo all'interno di questo intervallo.

$$P = -\left(p - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{9}{16} + \frac{1}{4} = -\left(p - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{13}{16} \leq \frac{13}{16}$$

L'uguaglianza si ha per $p = \frac{3}{4}$ (che verifica la condizione $\frac{1}{2} \leq \frac{3}{4} \leq 1$). La risposta è **29**.

Soluzione 2: La probabilità di poter arrivare da A a D si può valutare considerando i seguenti cinque casi (a due a due mutuamente esclusivi).

(1) AB e BD aperti (indipendentemente dagli altri tratti) → $P_1 = pq = \frac{1}{2}$;

(2) AB, BC, CD aperti, BD chiuso (indipendentemente da AC) → $P_2 = p^2q(1-q) = \frac{1}{2}p(1-q) = \frac{1}{2}p - \frac{1}{4}$;

(3) AC, CD aperti, AB chiuso (indipendentemente da BC e BD) → $P_3 = pq(1-p) = \frac{1}{2}(1-p) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}p$;

(4) AC, BC, BD aperti, AD, CD chiusi → $P_4 = p^2q(1-p)(1-q) = \frac{1}{2}p\left(1 - p - q + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}p - \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{4}$;

(5) AB, AC, CD aperti, BC, BD chiusi → $P_5 = p^2q(1-p)(1-q) = P_4 = \frac{3}{4}p - \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{4}$.

$$P = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}p + \frac{3}{2}p - p^2 - \frac{1}{2} = -p^2 + \frac{3}{2}p + \frac{1}{4}$$

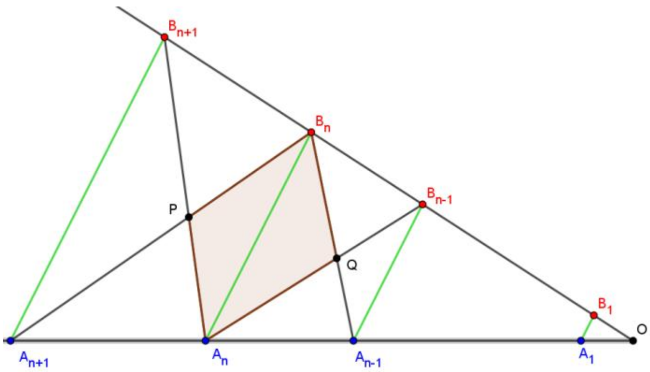
Il valore massimo (corrispondente corrispondente al vertice della parabola o allo zero della derivata prima) si ha per $p = \frac{3}{4}$ e vale $-\frac{9}{16} + \frac{9}{8} + \frac{1}{4} = \frac{13}{16}$. La risposta è **29**.

11. LA NON-PROPOSTA

Soluzione: Dato che $2026^{26} = 2^{26} \cdot 1013^{26}$, i divisori positivi di 2026^{26} sono 27^2. Un multiplo di 2026^{20} che divide 2026^{26} è della forma $2^a \cdot 1013^b$ con $20 \leq a, b \leq 26$, cioè ci sono 7 scelte sia per a che per b. Quindi 49 dei 27^2 divisori di 2026^{26} sono multipli di 2026^{20}. La probabilità richiesta è $\frac{49}{729}$. La risposta è quindi $\mathbf{778}$.

12. LA TRILATERAZIONE DEL PROF. CLARK

Indichiamo con a l'area del triangolo A_1OB_1. Consideriamo sulla semiretta a i punti A_{n-1}, A_n, A_{n+1} e sulla semiretta b i punti B_{n-1}, B_n, B_{n+1}. L'intersezione dei triangoli $B_{n-1}A_nB_{n+1}$ e $A_{n-1}B_nA_{n+1}$ è il quadrilatero PA_nQB_n. I triangoli A_nOB_n sono simili per ogni n. I segmenti A_nB_n misurano $\frac{n(n+1)}{2}z$, dove $z = \overline{A_1B_1}$; i segmenti A_nA_{n-1} misurano nx, dove $x = \overline{OA_1}$; i segmenti B_nB_{n-1} misurano ny, dove $y = \overline{OB_1}$. Per la similitudine, si ha che l'altezza del triangolo A_nQB_n relativa alla base A_nB_n è uguale a:



$$\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2}} \cdot nh = \frac{n+1}{2}h$$

dove h è l'altezza relativa alla base A_1B_1 del triangolo A_1OB_1. Allora, essendo $a = \frac{1}{2}zh$, l'area del triangolo A_nQB_n è

$$\text{Area }(A_nQB_n) = \frac{(n+1)}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}a$$

Analogamente, si ha che l'altezza del triangolo A_nPB_n relativa alla base A_nB_n è uguale a:

$$\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2}} \cdot (n+1)h = \frac{n}{2}h$$

Allora l'area del triangolo A_nQB_n è

$$\text{Area }(A_nPB_n) = \frac{n}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}a$$

L'area del quadrilatero PA_nQB_n è data da:

$$\text{A} = \text{Area }(PA_nQB_n) = \frac{(n+1)}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}a + \frac{n}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}a = \frac{n(n+1)(2n+1)}{4}a$$

Allora

$$a = \frac{4\text{A}}{n(n+1)(2n+1)}$$

Per $n = 10$ si ha $\frac{4 \cdot 23100}{10 \cdot 11 \cdot 21} = 40$. La risposta è $\mathbf{40}$.

13. I'M A MATH-ERIAL GIRL

Soluzione 1: Sia $x = (\alpha + 5)(\beta + 5)(\gamma + 5)$, sviluppando i calcoli si ottiene

$$x = \alpha\beta\gamma + 5(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) + 25(\alpha + \beta + \gamma) + 125$$

Considerando le relazioni coefficienti radici si ha che $\alpha + \beta + \gamma = 0$, $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = 1$, $\alpha\beta\gamma = -3$. Dunque il valore cercato è $x = -3 + 5 + 125 = 127$. La risposta è $\mathbf{127}$.

Soluzione 2: Il polinomio $p(x) = 2x^3 + 2x + 6$ si può scrivere nella forma:

$$p(x) = 2(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = -2(\alpha - x)(\beta - x)(\gamma - x)$$

Allora

$$p(-5) = -2(\alpha+5)(\beta+5)(\gamma+5) \quad \rightarrow \quad (\alpha+5)(\beta+5)(\gamma+5) = -\frac{p(-5)}{2} = \frac{254}{2} = 127$$

La risposta è $\mathbf{127}$.

14. NEVER ENDING STORY

Riscriviamo il numero $3^{2^{2026}} - 1$ nel seguente modo

$$3^{2^{2026}} - 1 = \left(3^{2^{2025}}+1\right)\left(3^{2^{2025}}-1\right) = \left(3^{2^{2025}}+1\right)\left(3^{2^{2024}}+1\right)\left(3^{2^{2024}}-1\right) =$$
$$= \left(3^{2^{2025}}+1\right)\left(3^{2^{2024}}+1\right)\left(3^{2^{2023}}+1\right)\left(3^{2^{2022}}+1\right) \cdots \left(3^{2^{1}}+1\right)\left(3^{2^{0}}+1\right)(3-1)$$

I termini $3^{2^k} - 1$, con k intero positivo, sono divisibili per 2 ma non per 4. Infatti, se k è un intero positivo, si ha $3^{2^k} \equiv 1 \bmod 2$, cioè $3^{2^k} + 1 \equiv 0 \bmod 2$, mentre $3^{2^k} + 1 \equiv 2 \bmod 4$. Quindi il massimo esponente di 2 tale che $2^n | 3^{2^{2026}} - 1$ è $2025 + 2 + 1 = 2028$. La risposta è $\mathbf{2028}$.

15. PURPLE RAIN

Il livello di energia complessivo generato dall'esplosione di x bombe di potenza a e y bombe di potenza b è dato da $ax + by$. Per il teorema di Frobenius, se a e b sono interi positivi primi tra loro, il numero di interi positivi che non si possono scrivere nella forma $ax + by$ con x e y interi non negativi, è

$$\frac{(a-1)(b-1)}{2}$$

Quindi $\frac{(a-1)(b-1)}{2} = 245$ da cui $(a-1)(b-1) = 2 \cdot 5 \cdot 7^2$. Si hanno le seguenti possibilità:

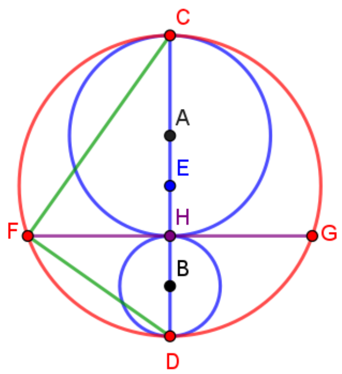
- $\begin{cases} a-1=1 \\ b-1=490 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=491 \end{cases}$ da scartare perché per $x = 40$ e $y = 0$ si ottiene 80;
- $\begin{cases} a-1=2 \\ b-1=245 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=246 \end{cases}$ da scartare perché 3 e 246 non sono primi tra loro;
- $\begin{cases} a-1=5 \\ b-1=98 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=99 \end{cases}$ da scartare perché 6 e 99 non sono primi tra loro;
- $\begin{cases} a-1=7 \\ b-1=70 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=8 \\ b=71 \end{cases}$ da scartare perché per $x = 10$ e $y = 0$ si ottiene 80;
- $\begin{cases} a-1=10 \\ b-1=49 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=11 \\ b=50 \end{cases}$;
- $\begin{cases} a-1=14 \\ b-1=35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=15 \\ b=36 \end{cases}$ da scartare perché 15 e 36 non sono primi tra loro.

Per $a = 11$ e $b = 50$ non è possibile scrivere 80 nella forma $ax + by$ con x e y interi non negativi; infatti:

- Se $y = 0$, allora $11x = 80$ non ha soluzione intera;
- Se $y = 1$, allora $11x = 30$ non ha soluzione intera;
- Se $y \geq 2$, allora $11x + 50y > 80$.

Quindi $a = 11$ e $b = 50$. La risposta è $\mathbf{61}$.

16. NOI SIAMO UNO



I raggi delle due sfere sono rispettivamente $\overline{BH} = \frac{27}{2}$ e $\overline{AH} = \frac{75}{2}$. Per il secondo teorema di Euclide si ha $\overline{FH}^2 = \overline{CH} \cdot \overline{HD}$. La superficie di base dei due segmenti sferici è $S = \pi \cdot \overline{FH}^2 = \pi \cdot 27 \cdot 75$, da cui si ottiene $S = 3{,}1416 \cdot 2025 = 6361{,}74$. La risposta è $\mathbf{6361}$.

17. HELLFIRE CLUB

Sia $p = p(1)$ la probabilità di ottenere 1. Allora $p + 2p + \cdots + 2^{n-1}p = 1$, cioè $p = \frac{1}{2^n - 1}$. Lanciando due volte un dado i casi favorevoli per avere somma pari a $n+4$ sono $(4, n)$, $(n, 4)$, $(5, n-1)$, … , cioè in totale $n-3$ e hanno tutti probabilità $2^3 p \cdot 2^{n-1} p = 2^{n+2} p^2$; i casi favorevoli per avere somma pari a $n-1$ sono $(1, n-2)$, $(n-2, 1)$, $(2, n-3)$, … , cioè in totale $n-2$ e hanno tutti probabilità $p \cdot 2^{n-3} p = 2^{n-3} p^2$. Allora

$$\frac{p(n+4)}{p(n-1)} = \frac{(n-3)2^{n+2}p^2}{(n-2)2^{n-3}p^2} = \frac{n-3}{n-2} \cdot 2^5$$

Per $n \geq 3$, $\frac{n-3}{n-2}$ è una quantità positiva e crescente. Il massimo valore intero del rapporto si ottiene per $n = 34$ ed è 31. La risposta è dunque $\mathbf{34}$.

18. Mr. WHEELER

I numeri primi minori di 100 sono:

$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97\}.$$

Abbiamo esattamente 25 numeri semiprimi minori di 200 che hanno almeno un fattore uguale a 2; 17 numeri semiprimi che hanno almeno un fattore 3 e nessun fattore 2; 10 che hanno un fattore 5 e nessun fattore 2 e 3; 6 che hanno un fattore 7 e nessun fattore 2, 3 e 5; 3 che hanno almeno un fattore 11 e nessun fattore 2, 3, 5 e 7; infine c'è un solo numero semiprimo che ha un fattore 13 e nessun fattore 2, 3, 5, 7, e 11 cioè 13^2. I numeri semiprimi minori di 200 sono $25 + 17 + 10 + 6 + 3 + 1 = 62$. La risposta è $\mathbf{62}$.

19. SEVEN SHOOTS

Soluzione 1: Nancy deve colpire con due dei sette proiettili il mostro vicino e questo lo può fare in $\binom{7}{2}$ modi diversi. Restano poi cinque proiettili da sparare sui restanti quattro mostri. I modi di colpirli ameno una volta ciascuno sono tanti quante le funzioni suriettive da $\{1,2,3,4,5\}$ a $\{a, b, c, d\}$. Il numero di funzioni è 4^5; utilizzando il principio di inclusione-esclusione si trova il numero delle funzioni suriettive

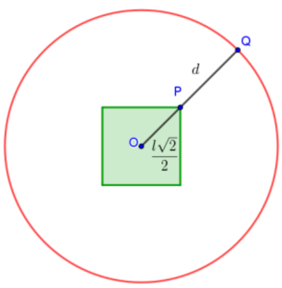
$$\sum_{0 \leq i \leq 4} (-1)^i \binom{4}{i} (4-i)^5 = 4^5 - \binom{4}{1} 3^5 + \binom{4}{2} 2^5 - \binom{4}{3} 1^5 = 1024 - 972 + 192 - 4 = 240$$

In numero cercato è quindi $21 \cdot 240 = 5040$. La risposta è $\mathbf{5040}$.

Soluzione 2: Nancy deve colpire due volte il mostro ferito F più vicino a lei e assestare un colpo ciascuno ai mostri A, B, C, D e ad uno di questi quattro anche un secondo colpo. Si tratta di contare quattro volte gli anagrammi della parola $AABCDFF$, cioè $4 \cdot \frac{7!}{2! \cdot 2!} = 7! = 5040$. La risposta è $\mathbf{5040}$.

20. THE WORMHOLE

Condizioni iniziali del wormhole e dati relativi alla torre: altezza iniziale del wormhole $H_0 = 4400$, altezza iniziale della gola $z_{g_0} = 2200$, raggio del wormhole a quota zero $r_0 = 200\sqrt{146}$, altezza della torre $h_t = 2000$, lato di base della torre $l_t = 600$, altezza della piattaforma $h_p = 1600$, distanza piattaforma-gola $d = 409{,}6 - 60\sqrt{2}$ [vedi figura]. Ricaviamo il raggio iniziale della gola,



$$g_0^2 = r_0^2 - z_{g_0}^2 = 40000 \cdot 146 - 40000 \cdot 121 \;\rightarrow\; g_0 = 1000$$

Al rintocco n_k la gola si trova alla quota della piattaforma. Per determinare il raggio della gola troviamo il lato della piattaforma: $\frac{l}{l_t} = \frac{h_t - h_p}{h_t} \;\rightarrow\; l = 120$. Quindi $g_{n_k} = \frac{l\sqrt{2}}{2} + d = 409{,}6$. Dalla relazione $g_{n_k} = g_0 \left(\frac{4}{5}\right)^{n_k}$ si ricava $n_k = 4$. La funzione che esprime l'altezza del wormhole in funzione del tempo espresso in minuti è $H(t) = 4400 + mt$. Dato che $H(4) = 3200$; $3200 =$

$4400 - 4m \rightarrow m = -300$. Calcoliamo il tempo necessario affinché la sommità dell'Abisso passi da quota 3200 a quota 1600: $1600 = 3200 - 300t \rightarrow t = \frac{16}{3}$ minuti, allora $t = \frac{16}{3} \cdot 60 = 320$ secondi. La risposta è $\mathbf{320}$.

21. WE CAN BE HEROES

Sia $q(x) = p(x) - x^2 - 20$. Dato che $q(n) = p(n) - n^2 - 20 = 0\ \forall\, n = 0, 1, \dots, 25$, si ha $q(x) = A\,x(x-1)\,\cdots\,(x-25)$ e dunque $p(x) = A\,x(x-1)\,\cdots\,(x-25) + x^2 + 20$. Sappiamo inoltre che $\frac{p(1)-p(-1)}{2} = -13$, da cui si ha $p(-1) = 47$. Allora $47 = 26!\,A + 21$, da cui $A = \frac{1}{25!}$.

$$p(26) = \frac{1}{25!} \cdot 26! + 26^2 + 20 = 26 \cdot 27 + 20 = 722$$

La risposta è $\mathbf{722}$.